Chapitre 11. Compléments sur les nombres réels

1 Partie entière

1.1 Caractère archimédien des réels et définitions

Proposition 1.1 (Caractère archimédien de $\mathbb{R}$)**.** On a $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z} : n > x$

Proposition 1.2. Soit $x \in \mathbb{R}$
Alors il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$
Cet entier n est appelé partie entière (inférieure) de x et noté $\lfloor x \rfloor$

Corollaire 1.3 (du caractère archimédien)**.**
* On a $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n} < \varepsilon$
* (Propriété d'Archimède) : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$

1.2 Premières propriétés

Proposition 1.4.
* On a $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$
* $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$
* $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, n \leq x \iff n \leq \lfloor x \rfloor$
* La fonction $\lfloor \cdot \rfloor$ croît : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \implies \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$

1.3 Division euclidienne dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.5. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $T \in \mathbb{R}_+^*$
Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times [0, T[$ tel que $x = qT + r$

2 Vocabulaire de la proximité

2.1 Points δ-proches

Proposition 2.1. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $\delta \geq 0$
LASSÉ :

(i) $|x - y| \leq \delta$

(ii) $x - \delta \leq y \leq x + \delta$

(iii) $y \in [x - \delta, x + \delta]$

(iv) $y - \delta \leq x \leq y + \delta$

(v) $x \in [y - \delta, y + \delta]$

Si ces assertions sont vraies, on dit que x et y sont δ-proches.

Proposition 2.2 (Inégalité triangulaire)**.** Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ et $\delta, \eta \geq 0$
Alors, si x et y sont δ-proches et que y et z sont η-proches alors x et z sont $(\delta + \eta)$-proches.

2.2 Points adhérents à une partie

Définition 2.3. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$
On dit que x est adhérent à A si $\forall \delta > 0, \exists a \in A : |x - a| \leq \delta$
On note $\overline{A}$ ou $\mathrm{Adh}(A)$ et on appelle adhérence de A l'ensemble des points adhérents à A.

2.3 Densité

Proposition 2.4. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$
LASSÉ :

(i) Tout intervalle ouvert non vide rencontre A (a une intersection non vide avec A)

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \delta > 0, \exists a \in A : |x - a| \leq \delta$

(iii) $\overline{A} = \mathbb{R}$

Quand ces assertions sont vraies, on dit que A est dense (dans $\mathbb{R}$)

Proposition 2.5. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Corollaire 2.6. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

3 Bornes supérieures et inférieures

3.1 Définition et existence

Définition 3.1.

- $*$ Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée.
La borne supérieure de A (si elle existe) est le plus petit des majorants de A.
On la note $\sup(A)$
- $*$ De même, si $A \subseteq \mathbb{R}$ est non vide et minorée,
On appelle borne inférieure de A le plus grand des minorants de A.
On la note $\inf(A)$

Théorème 3.2 (Propriété de la borne supérieure)**.**
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

Proposition 3.3. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ admet un maximum, alors $\sup(A) = \max(A)$

Corollaire 3.4. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ non vide et majorée.
Si $\sup(A) \notin A$, alors A n'a pas de maximum.

3.2 Caractérisation et utilisation pratique

Proposition 3.5. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ non vide et majorée et $S \in \mathbb{R}$
LASSÉ :

(i) $S = \sup(A)$

(ii) (caractérisation epsilonesque) : S majore A et $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : a \geq S - \varepsilon$

(iii) S majore A et $S \in \overline{A}$

(iv) (caractérisation sequentielle) : S majore A et il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$

Proposition 3.6 (Passage à la borne supérieure des inégalités larges)**.**
Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ non vide et majorée et $M \in \mathbb{R}$
Alors $\sup(A) \leq M \iff M$ majore A

4 Compléments

4.1 Sous-groupes de $\mathbb{R}$

Théorème 4.1. Tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est monogène ou dense.

4.2 Retour sur le caractère archimédien

Rémarque : la propriété de la borne supérieure entraîne le caractère archimédien de $\mathbb{R}$, càd
$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z} : n > x$

4.3 Classification des intervalles

Théorème 4.2. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle.
Alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que

$$I \in \{\emptyset,\ \{a\},\ [a,b],\ [a,b[,\ ]a,b],\ ]a,b[,\ [a,+\infty[,\ ]a,+\infty[,\ ]-\infty,b]\ ,\ ]-\infty,b[\ ,\ \mathbb{R}\}$$